Terminale Spécialité Physique-Chimie	Thème : Mouvement et interactions	M.KUNST-MEDICA	

Chapitre 11 : Mouvement dans un champ de gravitation

Feuille d'évaluation à rendre obligatoirement avec la copie

Correction Activité numérique n°11.2 – p 56 : Neptune et ses satellites

1 Énoncé des lois de Kepler

1re loi de Kepler ou loi des orbites :

Dans le référentiel héliocentrique, la trajectoire du centre P d'une planète est une ellipse dont l'un des foyers est le centre du Soleil.

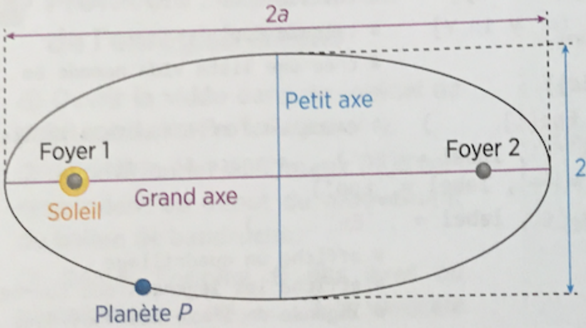
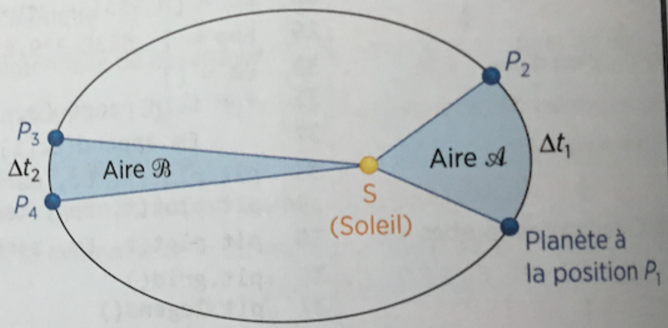


Schéma de la trajectoire elliptique d'une planète

2e loi de Kepler ou loi des aires :

Le segment $[SP]$ qui relie le centre S du Soleil au centre P d'une planète balaie des aires égales pendant des durées Δt égales.



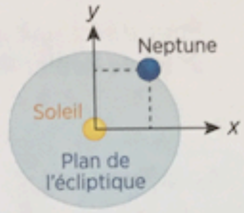
Si $\Delta t_1 = \Delta t_2$ alors Aire $\mathcal{A}$ = Aire $\mathcal{B}$

3e loi de Kepler ou loi des périodes :

Le quotient du carré de la période de révolution T (en s) d'une planète par le cube de la longueur a (en m) du demi-grand axe de son orbite est égal à une même constante k (en $s^2 \cdot m^{-3}$) pour toutes les planètes du système solaire : $\frac{T^2}{a^3} = k$.

Donnée : constante de gravitation universelle $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$.

2 Éphéméride des positions de Neptune dans le repère héliocentrique écliptique



La position prévisionnelle de Neptune dans le repère héliocentrique écliptique est donnée dans le tableau ci-dessous (**à télécharger**) à la même date entre 2020 et 2024 (avec pour référence l'écliptique du 1er janvier 2000).

Donnée : 1 ua = $1{,}5 \times 10^{11}$ m = distance Terre-Soleil.

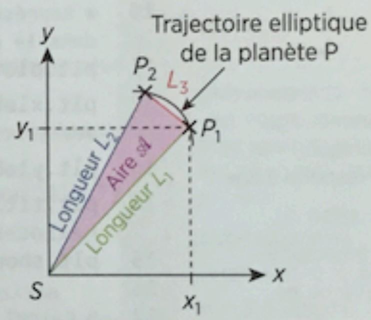
Année	2020	2021	2022	2023	2024
Abscisse x (ua)	29,4328410560730	29,6118356847488	29,7457682031831	29,8342404541355	29,8774316380940
Ordonnée y (ua)	– 5,3906071859853	– 4,2505317595919	– 3,1034908723970	– 1,9519995345194	– 0,7985426911486

Propriétés mathématiques

- **Formule de Héron d'Alexandrie :**

Calcul d'une aire balayée par le segment [SP] entre deux points P_1 et P_2 :

Aire $\mathcal{A} = \sqrt{p \times (p - L_2) \times (p - L_3) \times (p - L_1)}$, avec $p = \dfrac{L_1 + L_2 + L_3}{2}$.



- **Calcul de l'excentricité e d'une ellipse :**

$e = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}}$ avec a la longueur du demi-grand axe de l'ellipse et b la longueur de son demi-petit axe.

L'excentricité indique l'écart au cercle de la forme de l'orbite : une excentricité nulle correspond à un cercle.

Application

Soient P_1 et P_2 les positions prises par Neptune respectivement en 2020 et en 2021 (tableau 2).

- Compléter les coordonnées :
  - du point P_1(29,432 841 056 073 0 ; –5,390 607 185 985 3) ;
  - du point P_2(29,611 835 684 748 8 ; –4,250 531 759 591 9) ;
  - du Soleil S(0 ; 0).
- Calculer la longueur L_1 entre le Soleil et P_1 :

$L_1 = \sqrt{(29{,}432\,841\,056\,073\,0)^2 + (-5{,}390\,607\,185\,985\,3)^2} = 29{,}922\,412\,64$ ua

- Calculer la longueur L_2 entre le Soleil et P_2 :

$L_2 = \sqrt{(29{,}611\,835\,684\,748\,8)^2 + (-4{,}250\,531\,759\,591\,9)^2} = 29{,}915\,344\,44$ ua

3 Caractéristiques des satellites naturels de Neptune

Le tableau ci-dessous donne les valeurs du demi-grand axe a de l'orbite des satellites réguliers de Neptune (c'est-à-dire ayant une orbite quasi circulaire) et leur période de révolution T.

Satellite	Naïade	Thalassa	Despina	Galatée	Larissa	Hippocampe	Protée
a (km)	$48{,}227 \times 10^3$	$50{,}075 \times 10^3$	$52{,}526 \times 10^3$	$61{,}593 \times 10^3$	$73{,}458 \times 10^3$	$105{,}200 \times 10^3$	$117{,}647 \times 10^3$
T (j)	0,294	0,311	0,335	0,429	0,555	0,936	1,122

Question 1 :

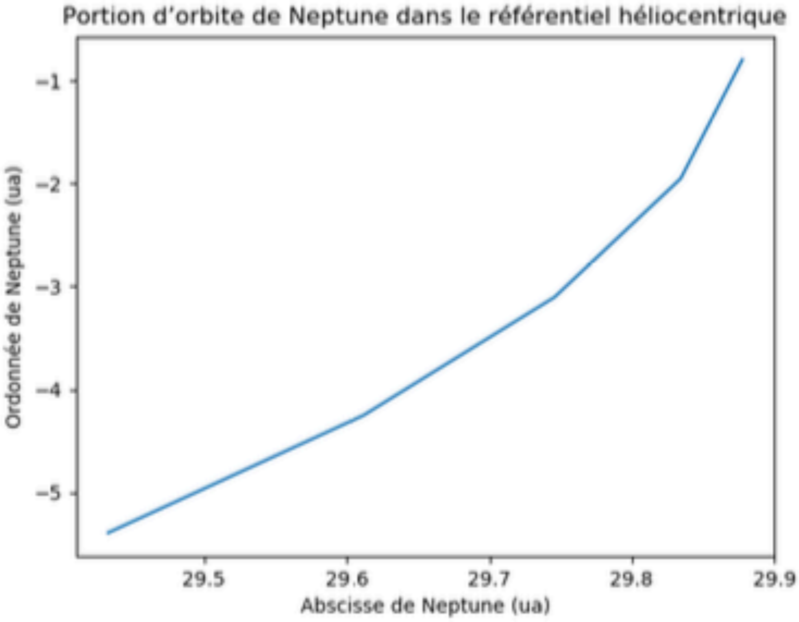
Comme l'excentricité indique l'écart au cercle de la forme de l'orbite et qu'une excentricité nulle correspond à un cercle, on en déduit que l'excentricité de Neptune *e* = 0,00896, qui est proche de zéro, permet d'affirmer que sa trajectoire est quasi circulaire autour du Soleil.

Question 2 :

```
import matplotlib.pyplot as plt # importe les bibliothèques nécessaires
import numpy as np
import math as m

# Coordonnées de Neptune en unité astronomique
X = [29.4328410560730, 29.6118356847488, 29.7457682031831, 29.8342404541355, 29.8774316380940] # abscisse
Y = [-5.3906071859853, -4.2505317595919, -3.1034908723970, -1.9519995345194, -0.7985426911486] # ordonnée
t = [2020, 2021, 2022, 2023, 2024] # dates de relevé des coordonnées

# Représentation d'une portion de l'orbite de Neptune de 2020 à 2024 dans le plan de l'écliptique
plt.plot(X, Y) # trace la courbe X en fonction de Y
plt.xlabel('Abscisse de Neptune (ua)') # légende de l'axe des abscisses
plt.ylabel('Ordonnée de Neptune (ua)')
plt.title("Portion d'orbite de Neptune dans le référentiel
héliocentrique")     # titre du graphique
plt.show()           # affiche le graphique

# Calcul des aires parcourues entre 2020 et 2021
L1_a = m.sqrt(X[0]**2 + Y[0]**2) # distance L1_a en ua
L2_a = m.sqrt(X[1]**2 + Y[1]**2)
L3_a = m.sqrt((X[1] - X[0])**2 + (Y[1] - Y[0])**2)
p_a = (L1_a + L2_a + L3_a)/2 # demi-périmètre
Aire_a = m.sqrt(p_a*(p_a - L2_a)*(p_a - L3_a)*(p_a - L1_a)) # aire balayée entre 2020 et 2021
print ("L'aire parcourue par le rayon vecteur entre 2020 et 2021 vaut : ", round(Aire_a, 2), "ua^2") # affiche le résultat

# Calcul des aires parcourues entre 2022 et 2023
L1_b = m.sqrt(X[3]**2 + Y[3]**2) # distance L1_b en ua
L2_b = m.sqrt(X[2]**2 + Y[2]**2)
L3_b = m.sqrt((X[3] - X[2])**2 + (Y[3] - Y[2])**2)
p_b = (L1_b + L2_b + L3_b)/2 # demi-périmètre
Aire_b = m.sqrt(p_b*(p_b - L2_b)*(p_b - L3_b)*(p_b - L1_b)) # aire balayée entre 2022 et 2023
print ("L'aire parcourue par le rayon vecteur entre 2022 et 2023 vaut : ", round(Aire_b, 2), "ua^2") # affiche le résultat
```

Question 3 :

Après exécution du programme, la fenêtre graphique ci-dessous s'affiche :



Le résultat affiché dans la console Python est :

```
>>>
L'aire parcourue par le rayon vecteur entre 2020 et 2021 vaut :  17.26 ua^2
L'aire parcourue par le rayon vecteur entre 2022 et 2023 vaut :  17.26 ua^2
>>>
```

Pendant une année, soit de 2020 à 2021, soit de 2022 à 2023, l'aire balayée est la même : A = 17,26 ua^2.
D'après la 2^e loi de Kepler : le segment [*SP*] qui relie le centre *S* du Soleil au centre *P* d'une planète (Neptune) balaie des aires égales pendant des durées égales.
La 2^e loi de Kepler est bien vérifiée.

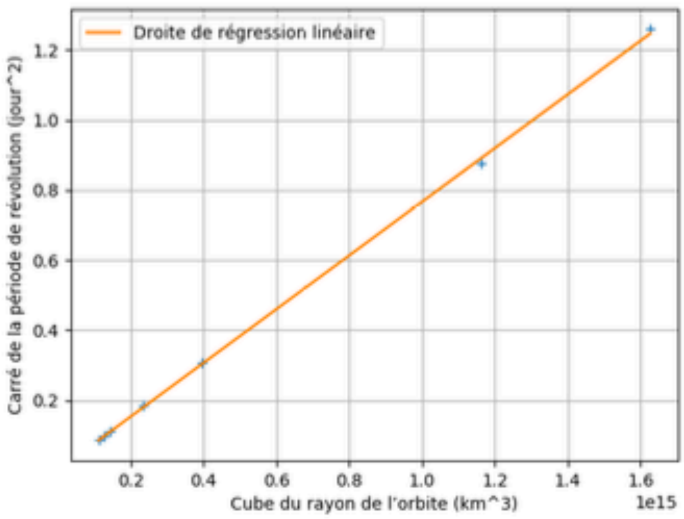
Question 4 :

a) et **b)**

```python
# Importation des bibliothèques et modules
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.stats import linregress # importe le module linregress

# Création des tableaux de valeurs
R = np.array([48.227e3, 50.075e3, 52.526e3, 61.593e3, 73.458e3, 105.200e3, 117.647e3])
# valeurs des rayons (en km) des orbites circulaires des satellites autour de Neptune
T = np.array([0.294, 0.311, 0.335, 0.429, 0.555, 0.936, 1.122]) # période de révolution (en jour) des satellites de Neptune
R3 = R**3       # cube du rayon de l'orbite du satellite
T2 = T**2       # carré de la période

# Tracé de la courbe expérimentale T2 en fonction de R3
plt.plot(R3, T2, '+') # trace les points expérimentaux pour la courbe T^2 = f(R^3)
plt.xlabel("Cube du rayon de l'orbite (km^3)") # légende de l'axe des abscisses
```

```python
plt.ylabel("Carré de la période de révolution (jour^2)")
plt.grid()        # affiche un quadrillage

# Régression linéaire et affichage de la droite de régression
(a, _, _, _, _) = linregress(R3, T2) # modélise la courbe précédente par une droite de coefficient directeur a
print('Le coefficient directeur de la droite est : ', a, "en jour^2/km^3")   # affiche la valeur du coefficient directeur a
T2_modelisation = a*R3 # calcule la période connaissant le coefficient directeur a
plt.plot(R3, T2_modelisation, label = 'Droite de régression linéaire')   # trace la droite de régression linéaire
plt.legend()      # affiche la légende des courbes
plt.show()        # affiche le graphique
```

c) Après exécution du programme, la fenêtre graphique s'affiche :



Le résultat ci-dessous est affiché dans la console Python :

```
>>>
le coefficient directeur de la droite est :  7.658455435236676e-16 en jour^2/km^3
>>>
```

D'après la 3e loi de Kepler : le quotient du carré de la période de révolution *T* d'une planète par le cube de la longueur *a* du demi grand axe de son orbite est égal à une même constante *k* pour toutes les planètes du système solaire.
Le graphique représentant l'évolution du carré de la période de révolution des satellites de Neptune en fonction du cube du rayon de leur orbite est une droite linéaire : les points expérimentaux sont alignés et la droite de régression passe par le point (0 ; 0). On en déduit que la 3e loi de Kepler est vérifiée pour les satellites de Neptune et que la constante *k* correspond au coefficient directeur de la droite :
$k = 7{,}66 \times 10^{-16}\ \text{j}^2 \cdot \text{km}^{-3}$

d) On sait que $\frac{T^2}{R^3} = k$ et que $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G \times M_{\text{Neptune}}}$, d'où :

$$k = \frac{4\pi^2}{G \times M_{\text{Neptune}}}$$

k est exprimé en $\text{j}^2 \cdot \text{km}^{-3}$ dans la console Python, il faut le convertir en $\text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$:

$$k = \frac{7{,}66 \times 10^{-16}\ \text{j}^2}{\text{km}^3} = \frac{7{,}66 \times 10^{-16} \times (24 \times 3\,600\ \text{s})^2}{(1 \times 10^3\ \text{m})^3} = \frac{7{,}66 \times 10^{-16} \times (24 \times 3\,600)^2\ \text{s}^2}{(1 \times 10^3)^3\ \text{m}^3} = 5{,}72 \times 10^{-15}\ \text{s}^{-2} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$M_{\text{Neptune}} = \frac{4\pi^2}{G \times k} = \frac{4\pi^2}{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}72 \times 10^{-15}} = 1{,}04 \times 10^{26}\ \text{kg}$$

La masse de Neptune vaut : $1{,}04 \times 10^{26}$ kg.